

## EXPLORANDO ESTRATEGIAS EN PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA PISA. UN ESTUDIO DE CASOS



Florida Pastrana, Guadalupe Cabañas-Sánchez  
 flor\_jua\_10@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com  
 Universidad Autónoma de Guerrero  
 Reporte de investigación  
 Medio Superior

### Resumen

El artículo analiza las estrategias empleadas por estudiantes de bachillerato, mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA. El estudio se sustenta de las explicaciones escritas, verbales y gestuales presentadas por los estudiantes en el proceso de solución de los problemas. En el análisis de sus explicaciones, tres aspectos fueron fundamentales: a) La *cantidad* de conocimiento que posee; b) la *calidad* de lo que sabe, y; c) la *diversidad* de los conocimientos previos que tiene. Ello, en razón de que fueron básicos en el uso de las estrategias; que emergieron según el tipo de problema. En un mismo problema, se caracterizaron cuatro tipos de estrategias: a) La comparación de perímetro de una figura familiar con las figuras irregulares; b) La descomposición y recomposición de polígonos; c) la comparación de las longitudes de los segmentos, y; d) la medición de las longitudes de segmentos.

**Palabras Clave:** *Estrategias, problemas matemáticos, prueba PISA.*

### 1. INTRODUCCIÓN

El artículo analiza las estrategias desarrolladas por estudiantes de bachillerato del estado de Guerrero, mientras resuelven problemas matemáticos planteados en la prueba PISA<sup>1</sup>. Las motivaciones que dieron origen a esta investigación, se derivan, por un lado, de los cuestionamientos hechos al nivel de competencias alcanzado por una mayoría de estudiantes mexicanos que participan en esta prueba (INEE, 2010), particularmente, en el área de matemáticas; por otro, en razón de que estos resultados, como señala Díaz-Barriga (Díaz-Barriga, 2006), ocultan el problema de fondo: el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Si bien se reconoce que los datos obtenidos de pruebas masivas como PISA son importantes independientemente de los cuestionamientos, también lo es el hecho de que mediante ellos, sólo es posible hacer comparaciones, ya sea entre países, al interior de un país o entre regiones o entre escuelas, lo que resulta insuficiente, ya que también es de interés tanto para profesores de matemáticas como para la investigación, conocer qué es lo que los alumnos saben, de la cantidad y calidad de lo que saben y cómo lo usan en la resolución de una diversidad de problemas. De ahí nuestro interés por explorar las estrategias usadas por estudiantes mientras resuelven problemas matemáticos de la citada prueba, a fin de conocer mejor los procesos que desarrollan. Para llevar adelante este trabajo, nos planteamos la pregunta siguiente: *¿Cuáles son las estrategias que desarrollan los estudiantes mientras resuelven problemas matemáticos de la prueba PISA?*

### 2. ORIENTACIÓN TEÓRICA

El concepto de estrategia y su caracterización es fundamental en este trabajo, por ello, asumimos la connotación de Escoriza (2003), quien sostiene que son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático

<sup>1</sup> Program for International Student Assessment.

y continuado durante el proceso orientados al logro de los objetivos previstos. Distingue las siguientes características sustanciales en las estrategias:

- a) Son secuencias organizadas de objetivos, acciones y operaciones cognitivas.
- b) Forman parte del conocimiento procedural, es decir, nos indica cómo realizar una acción cognitiva o una acción determinada con la finalidad de conseguir el logro de un objetivo específico.
- c) Son procesos deliberados, es decir, son controlados y regulados por una cognición intencional, las acciones y operaciones son guiadas por las estrategias haciendo posible su regulación y evaluación en la progresión hacia el objetivo previsto.
- d) Son procesos propositivos pues su ejecución está orientada al logro intencional de determinados objetivos. Especificar los objetivos de la actividad es una cuestión esencial en el conocimiento estratégico pues implica intencionalidad y autocontrol.
- e) Son secuencias de operaciones mediadas simbólicamente, en esto el lenguaje juega un papel primordial, ya que regula el comportamiento y con ello supone que las estrategias sean realizadas de manera consciente y por tanto bajo control voluntario.

Escoriza distingue además, que las características de un lector ante la resolución de un problema, consisten de: a) La *cantidad* de conocimiento que posee; b) la *calidad* de lo que sabe, y; c) la *diversidad* de los conocimientos previos que posee. Estas características se conciben fundamentales para una adecuada interpretación, comprensión y resolución de un problema.

### 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Desde el punto de vista metodológico es una investigación cualitativa con carácter interpretativo. Se sustenta de las explicaciones escritas, verbales y no verbales, como las gestuales, presentadas por los estudiantes en dos momentos de su participación: a) al resolver problemas matemáticos de la prueba PISA, y; b) durante una entrevista de tipo abierta.

#### *El estudio de casos como método de investigación*

La investigación se inscribe en un estudio de casos el cual se concibe como una forma de estudiar a un individuo o a una institución en un entorno o situación único y de una forma lo más intensa y detallada posible (Castillo, 2008). Estos estudios se consideran un método de investigación que facilita la búsqueda de respuestas sobre el “cómo” o del “por qué” de los hechos sociales, ya que se centra en el análisis profundo de uno o varios casos específicos (Yacuzzi, 2005). Por ello lo consideramos un método adecuado para profundizar en el entendimiento de los procesos desarrollados por los estudiantes durante la resolución de los problemas, sin buscar una generalización de los resultados, sino más bien, una caracterización de estrategias.

#### *Participantes y contexto*

Participaron seis estudiantes de primer año de bachillerato, cuyas edades oscilaban entre los 15 años, tres meses y 16 años, dos meses. Este rango de edad fue fundamental, en razón de que es la considerada por la OCDE<sup>2</sup> para la aplicación de la prueba PISA. Esta población, se localiza en

<sup>2</sup> Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico, quien propone la medición de competencias a través de la prueba PISA a los estudiantes de países miembros como México.

tercer año de secundaria y en primer año de bachillerato. De los participantes, cuatro estaban matriculados en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) y los otros dos, en el Centro de Estudios Tecnológicos y de Servicios No. 135 (Cetis 135), ambos centros educativos, se ubican en la ciudad de Chilpancingo, Gro.

#### *Problemas matemáticos de la prueba PISA*

Los problemas matemáticos usados en la exploración provienen de la prueba PISA, de los llamados liberados. Este tipo de problemas y su solución, involucran tres dimensiones: *procesos*, *contenido* y *contexto*, consisten de lo siguiente:

- *Procesos*. Se refiere a las capacidades que pueden activar los estudiantes para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos. Esta dimensión se divide en tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión.
- *Contenido*. Se remite al tipo de tema abordado en los problemas y tareas de matemáticas que se presentan a los estudiantes, y consiste de los temas de cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones y probabilidad.
- *Contexto*. Alude a los ámbitos en que se sitúan los problemas matemáticos, los cuales se dividen en Personal, Público, educativo y laboral y científico.

Los problemas se plantean a través de un enunciado y se apoyan de tablas, gráficas, figuras, etc. En ellos se formulan una o más preguntas, que pueden ser abiertas, cerradas, cortas o de opción múltiple. La selección de los problemas atendió a los criterios siguientes:

- Que correspondiera a un *contenido* diferente.
- Que los procesos desarrollados por los estudiantes en su resolución, involucraran a la *reproducción* y a la *conexión*.
- Que atendieran a la mayoría de los *contextos* planteados por PISA.

Los problemas se resolvieron de manera individual, en un ambiente de lápiz y papel. El tiempo promedio empleado en ese proceso, fue de 40 minutos.

#### *Entrevistas*

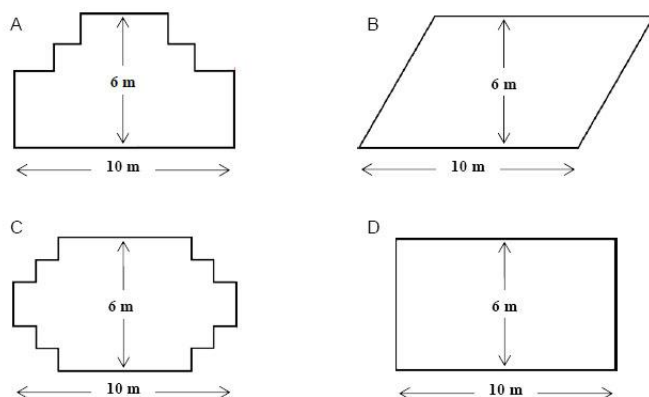
Mediante la entrevista indagamos de manera más profunda los procesos que siguieron los estudiantes en la resolución de los problemas. Nos apoyamos de preguntas como las siguientes:

1. ¿Tenías un plan o una idea inicial para resolver el problema?
2. ¿Qué se pide?
3. ¿Cómo lo resolviste?
4. ¿Cuál o cuáles son las respuestas al problema?
5. ¿Consideras que tu respuesta sea realmente la solución al problema?
6. ¿Crees que haya otra forma de resolverlo?

#### 4. ESTUDIO DE LOS CASOS

Por cuestiones de espacio, presentamos dos casos, el de Samantha y el de Ricarda quienes resolvieron un mismo problema, conocido como el problema del carpintero.

Un carpintero tiene la madera necesaria para hacer una cerca de 32 metros de largo y quiere colocarla alrededor de un jardín. Está considerando los siguientes diseños para ese jardín. Encierra en un círculo “Sí” o “No” para cada diseño, dependiendo si se puede realizar con la cerca de 32 metros.



El problema es de elección múltiple, corresponde al contenido de espacio y forma, y se ubica en el contexto educativo. Su solución, implica que los estudiantes comprendan que el problema se asocia con perímetro.

##### *El Caso de Samantha*

Samantha tiene 15 años con 7 meses cursa el segundo semestre de bachillerato en la Unidad Académica Preparatoria No. 1 de la UAG.

a) *¿Cómo resolvió el problema?*

Una primera acción de Samantha fue leer el enunciado del problema y con ello identifica que se relaciona con perímetro, lo infiere del enunciado, particularmente de la frase: “Para hacer una cerca”. Se corroboró a través de la entrevista, como se muestra a continuación:

Entrevistador: ¿Por qué se te ocurrió sumar?

Samantha: Porque me está pidiendo que... si se puede sacar el perímetro, no el área.

Para determinar cuál (o cuáles) de los diseños cumple con la exigencia del problema, primero explora el diseño D, porque reconoce en él, una figura “familiar”, el rectángulo, se infiere de la entrevista. También, porque sabe que puede calcular su perímetro de manera directa.

Entrevistador: ¿Cuál es el que resolviste primero?

Samantha: Primero me basé en el D...

Entrevistador: ¿Te basaste en qué?

Samantha: De que aquí no... no le hace falta ningún pedazo... y en eso me basé.

Tal como lo afirma en la entrevista, Samantha suma la medida de los lados del diseño D y con ello comprueba que el contorno mide 32 metros. Ello la lleva a decidir, que con este diseño si se

puede realizar la cerca objeto de estudio en el problema. Seguidamente, trabaja sobre el diseño A. Sus primeras acciones las orienta a descomponer y recomponer la forma geométrica, con el fin de formar un rectángulo, porque a través del diseño D, comprobó que esta figura si cumple con la exigencia. Su proceder fue como sigue:

- Descompone y recompone la figura y forma un rectángulo.
- Compara las longitudes de los segmentos que forman los lados del polígono que tienen forma escalonada (Figura 1). Con ello, infiere sus medidas.
- Calcula su perímetro y comprueba que es 32 m.

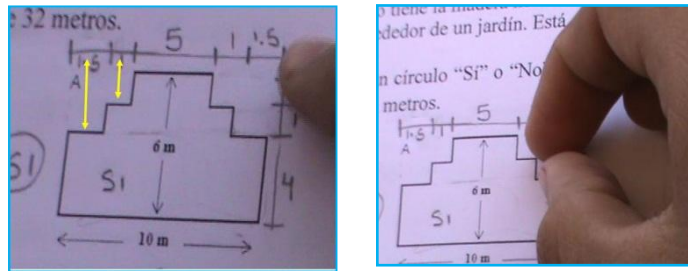


Figura 1. Transformación del polígono e inferencias de medidas

Entrevistador: Ya que tienes resuelto el inciso D, ¿Qué hiciste?

Samantha: Me fui al inciso A, para ir colocando cuánto mide cada pedazo de este terreno.

Entrevistador: ¿Cómo es que hiciste ese procedimiento? ¿Por qué hiciste esas líneas?

Samantha: Yo supongo que mide 4, si mide 4 entonces ésta debe medir 1 para dar los 6 metros que me dice aquí. Y aquí igual, pero nada más que estos pedazos están más grandes y por eso le puse que era un metro y medio.

Entrevistador: ¿Y cuánto te dio la suma de ese lado?

Samantha: Éste 10 metros.... Y éste 6.

A partir de esta forma de proceder, Samantha comprueba que el perímetro del diseño A también mide 32 m, exigencia del problema. Siguiendo el orden en que fueron ubicados los esquemas en el problema, Samantha trabaja con el diseño B y a partir de lo que sabe sobre esa figura geométrica, reconoce que ese diseño no cumple con la exigencia (ver entrevista).

Samantha: Me fui con éste (lo señala)... y yo pensaba que si se podía cercar porque aquí me dice la altura del... terreno pero luego analicé y me di cuenta que no se podía cercar, porque no sabemos cuánto mide aquí (señala los lados menores del romboide), pues sólo me dan la altura... Este no se podría cercar porque no sabemos los datos del terreno.

Para el diseño C, procede de la misma manera que lo hizo para el caso del diseño A, es decir:

- Descompone y recompone la figura con el fin de formar un rectángulo.

A diagram of a stepped figure. The base is labeled 10 m. The top horizontal segment is labeled 6 m. The vertical segments on the right are labeled 1, 1, 2, 1, and 3. The horizontal segments on the top are labeled 1, 1, and 1.

Figura 2: Transformación e inferencia de medidas



Ricarda tiene 15 años 4 meses, cursa el segundo semestre de bachillerato tecnológico en el Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios 135.

a) *¿Cómo lo resolvió el problema?*

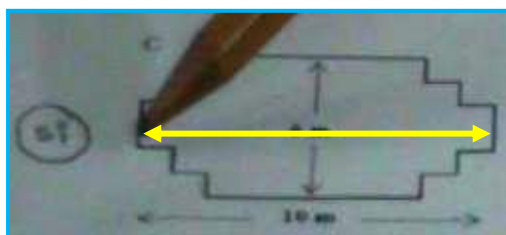
La primera acción de Ricarda fue leer el enunciado del problema. A partir de ello, reconoce que está relacionado con el perímetro, se infiere de algunas afirmaciones en su entrevista.

Ricarda: Hacer una cerca de 32 metros de largo...

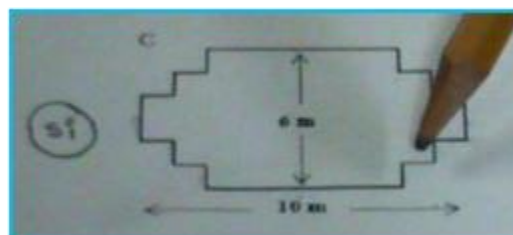
Entrevistador: ¿Era necesario saber para ti saber cuánto medía?

Ricarda: Sí porque... para sacar la medida... para que diera los 32 metros...

El orden que sigue Ricarda en su análisis sobre los diseños es: A, C, D y B. En el diseño A identifica una figura no “familiar”. Su análisis se apoya de la comparación de los segmentos que forman los lados del polígono que tienen forma escalonada; a partir de ello, infiere sus medidas. En seguida trabaja sobre el diseño C, del que afirma, mide 32 metros. Para justificar su aseveración, se apoya nuevamente de la medición. Primero, reconoce que mide 10 metros de largo, lo infiere de la medida dada y lo señala sobre el diseño (Figura 3a). Posteriormente, compara e infiere las medidas de las longitudes de los lados del polígono que tienen forma escalonada. De este modo, deduce que los segmentos pequeños miden un metro y los más grandes, el doble (Figura 3b), tal como lo afirma en la entrevista. Con estos datos, calcula el perímetro y comprueba que es 32 metros, lo expresa en términos de “me da 32” (ver entrevista).



a) Identifica que el segmento mide 10 metros



b) Infiere las medidas de cada uno de los segmentos

Figura 3. Comparación e inferencia de medidas.

Entrevistador: ¿Cómo calculaste las medidas?

Ricarda: Pues aquí son 10 metros, lo sumaba... si cada pedacito valía... un metro, entonces aquí valdría 2 metros. ¿Por qué un metro? Porque aquí no está dando 6 metros entonces si divido esto... si cada pedacito es de un metro, lo sumo y aquí le pongo que son 2 porque la medida casi se van dando igual, se ven iguales, y entonces aquí le puse que serían dos, porque si aquí son dos aquí puede valer uno, entonces los sumé y me daban 6, entonces si tengo 10 acá abajo y 6 de este lado, los sumo, 10 más 6 más 10 más 6 y si me da 32.

En el caso del diseño D reconoce que es un polígono “familiar”, y lo llama por su nombre, rectángulo. A partir de lo que sabe acerca de esta figura geométrica infiere, que mide 6 metros de ancho, lo indica sobre diseño. En seguida, procede a calcular su perímetro y comprueba que le resulta 32, por ello encierra en un círculo la palabra “sí”. Por cuanto al diseño B, se apoya de lo que sabe sobre el polígono involucrado, aunque sin explicitarlo (véase entrevista).

Ricarda: Aquí le puse que no porque pues aquí no me da esta medida, me da la medida del largo, pero... la medida de aquí a acá no me la da (señala con su dedo un lado menor del romboide), entonces yo no la puedo sumar porque no tengo esa medida y si le sumo... me estaría más de 32... si le pusiera la cerca no alcanzaría la madera.

b) *¿Cómo controla y valora su proceso de resolución?*

Se observa que Ricarda tiene control sobre la situación, ya que está consciente de que el perímetro de la figura debe ser 32 metros, lo verifica a través de la medición y ello la lleva a decidir si el diseño es el adecuado para cercar el jardín con la madera disponible. Esta forma de proceder la lleva a cabo sobre los diseños rectangulares irregulares. En el caso del rectángulo y del romboide, aplica lo que sabe sobre esos polígonos, es su forma de controlar la situación.

c) *Estrategias*

De acuerdo con su proceder, las estrategias que desarrolla son la comparación y medición de las longitudes de segmentos.

## 5. REFLEXIONES FINALES

El análisis da cuenta que el pensamiento matemático de los estudiantes está caracterizado por la variabilidad, ya que ante un mismo problema, tanto Samantha como Ricarda, los casos que presentamos, usaron estrategias diferentes. Así, Samantha se apoyó de: a) La comparación de perímetro de una figura familiar con las figuras irregulares, y; b) de la descomposición y recomposición de polígonos. Contrario a Ricarda, quien usó: a) La comparación de longitudes de los segmentos, y; b) la medición de las longitudes de segmentos. Nuestra hipótesis, es que dependen en gran medida de lo que saben, de la calidad de lo que saben y de su experiencia con la resolución de problemas de diferentes tipos. En el caso de los problemas de la prueba PISA, como el del carpintero, aun cuando se ubica en el contexto escolar, se observó que los estudiantes están poco familiarizados con las formas no convexas, por el privilegio que hay en el discurso matemático escolar por trabajar sobre formas convexas, de ahí la tendencia a transformarlas a una forma geométrica familiar. Si reflexionan en otros casos, también se inclinan por las de ese tipo, como lo hizo Samantha, al señalar que el diseño podría tener otra forma y la pensó rectangular.

## 6. REFERENCIAS

- Díaz-Barriga, A. (2006). El enfoque de competencias en la educación. ¿Una alternativa o un disfraz de cambio? *Perfiles Educativos* vol XXVIII, 111, 7-36.
- Castillo, M. (2008). *Proyectos de Investigación. Metodología de investigación científica USN. Método de estudio de caso.* Recuperado de: [www.itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC](http://www.itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC)
- Escoriza, J. (2003). *Evaluación del conocimiento de las estrategias de comprensión lectora.* España: Edicions Universitat, pp. 15-17.
- INEE (2010). *Información de México sobre PISA 2009.* México: INEE. Recuperado de: [www.revistas.unam.mx/index.php/perfiles/article/download/.../22662](http://www.revistas.unam.mx/index.php/perfiles/article/download/.../22662)
- Yacuzzi, E. (2005). *El estudio de caso como metodología de investigación: teoría, mecanismos causales, validación.* Recuperado de: <http://www.cema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/296.pdf>.